1/6/2020

Εκτός ύλης

Πρόταση Έστω $f(x) \in F[x]$ ένα κανονικό διαχωρίσιμο πολυώνυμο βαθμού n και E το σώμα ανάλυσης του $f(x)$ πάνω από το F. Αν $\Delta \notin F$, τότε η ομάδα Galois του $f(x)$ έχει μια κανονική υποομάδα με δείκτη 2.

Επιλύσιμες ομάδες

Έστω G μία πεπερασμένη ομάδα. Κανονική σειρά της G λέγεται μία ακολουθία υποομάδων G_i, $0 \leq i \leq s$, της G ως εξής: $G = G_0 \triangleright G_1 \dots \triangleright G_{s-1} \triangleright G_s = \{e\}$

s: μήκος σειράς, G_i / G_{i+1}, $0 \leq i \leq s-1$: παράγοντες σειράς. Αν οι παράγοντες μιας κανονικής σειράς είναι αβελιανές, τότε η σειρά είναι επιλύσιμη. Μία πεπερασμένη G που έχει μια επιλύσιμη σειρά λέγεται επιλύσιμη.

Πρέπει για κάθε i η G_{i+1} να είναι κανονική υποομάδα της G_i. (Γενικά, συνήθως η G_{i+1} δεν είναι κανονική υποομάδα της G.)

Παράδειγμα G = δυεδρική ομάδα τάξης 8 - συμμετρίες τετραγώνου

Η G έχει 5 στοιχεία τάξης 2, τα εξής: τους 4 κατοπτρισμούς, καθώς και την στροφή κατά 180 μοίρες.

Επομένως, έχει 5 υποομάδες τάξης 2.

Έστω ρ ένας από τους κατοπτρισμούς ως προς ευθεία. Τότε η ομάδα που παράγει έχει τάξη 2, δεν είναι κανονική υποομάδα της G. Συμβολίζουμε η την στροφή κατά 180 μοίρες. Τότε έχουμε e_G γνήσιο υποσύνολο $<\rho>$ γνήσιο υποσύνολο $<\rho, \eta>$ γνήσιο υποσύνολο G με τάξεις 1, 2, 4, 8.

Αφού υποομάδα δεικτού 2 είναι πάντα κανονική, έπεται ότι η παραπάνω είναι μια κανονική σειρά της G. Παρατηρούμε ότι $<\rho>$ δεν είναι κανονική στην G.

Π Η S_3 είναι επιλύσιμη, λόγω της κανονικής σειράς

e_G γν. υποσύνολο $<(1\,2\,3)>$ γν. υποσύνολο G

$<(1\,2\,3)> = \{e_G, (1\,2\,3), (1\,3\,2)>$ και έχει τάξη 3 επομένως αφού 3 πρώτα είναι κυκλική, συνεπώς αβελιανή. Η υποομάδα $<(1\,2\,3)>$ είναι δέικτου 2 στην G, συνεπώς είναι κανονική, και ομάδα πηλίκο. Η $G/<(1\,2\,3)>$ έχει τάξη 2 επομένως αφού 2 πρώτος είναι κυκλική, συνεπώς αβελιανή. Άρα S_3 επιλύσιμη. ③

Παράδ. Η S_4 είναι επιλύσιμη, λόγω της κανονικής σειράς.

$\{e_G\}$ γνήσιο υποσύνολο H γνήσιο υποσύνολο A_4 γνήσιο υποσύνολο S_4

όπου $H = \{e_G, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$

Πρόταση Αν $n \geq 5$, η A_n είναι απλή, δηλαδή οι μόνες κανονικές υποομάδες της είναι οι $\{e_{A_n}\}$ και η A_n

Πόρισμα Αν $n \geq 5$, η S_n δεν είναι επιλύσιμη

Πρόταση Κάθε ομάδα τάξης το πολύ 59 είναι επιλύσιμη. Αν A_5 που έχει τάξη 60 δεν είναι επιλύσιμη.

<u>Ορισμός</u>: Έστω $F \subseteq \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C}$ αλγεβρικό πάνω από το F. Θα λέμε ότι το στοιχείο a εκφράζεται με ριζικά αν ανήκει σε ένα σώμα E τ.ω. να υπάρχει μία ακολουθία σωμάτων

$$F = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_i \subset F_{i+1} \subset \dots \subset F_s = E$$

, s φυσικός αριθμός όπου $F_{i+1} = F_i(\sqrt[n_i]{a_i})$, για κάποιο $a_i \in F_i$, n_i φυσικό αριθμό $0 \leq i \leq s-1$

Για κάθε i υπάρχει θετικός ακέραιος n και στοιχείο b στο F_{i+1} ώστε b^n στοιχείο του F_i και $F_{i+1} = F_i(b)$

<u>Παράδειγμα</u>: $\mathbb{Q}$ υποσύνολο $\mathbb{Q}(i)$, γιατί $i^2 = -1$ στοιχείο το $\mathbb{Q}$

<u>Παράδειγμα</u> $\mathbb{Q}$ υποσύνολο $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$, γιατί $(\sqrt[3]{5})^3 = 5$ στοιχείο του $\mathbb{Q}$

<u>Υπενθύμιση</u>: Έστω $\omega = \cos(2\pi/n) + i\cdot\cos(2\pi/n)$, και η πρωταρχική n-οστή ρίζα της μονάδος στους μιγαδικούς. Έστω b μιγαδικός με $b^n = a$. Τότε, ξέρουμε ότι η εξίσωση $x^n = a$, για a μη μιγαδικό.

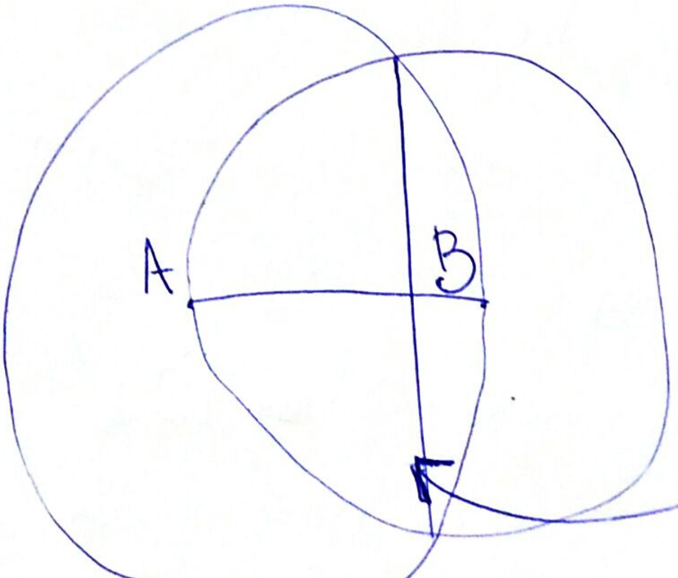
έχει τις εξής ρίζες : $b, b\omega, b\omega^2, \dots, b\omega^{n-1}$

Άρα αφού από υπόθεση ω στοιχείο του F, κάθε ρίζα του $x^n - a$ περιέχεται στο $F(b)$, και $b^n = a$ στοιχείο του F.

Θεώρημα του Galois

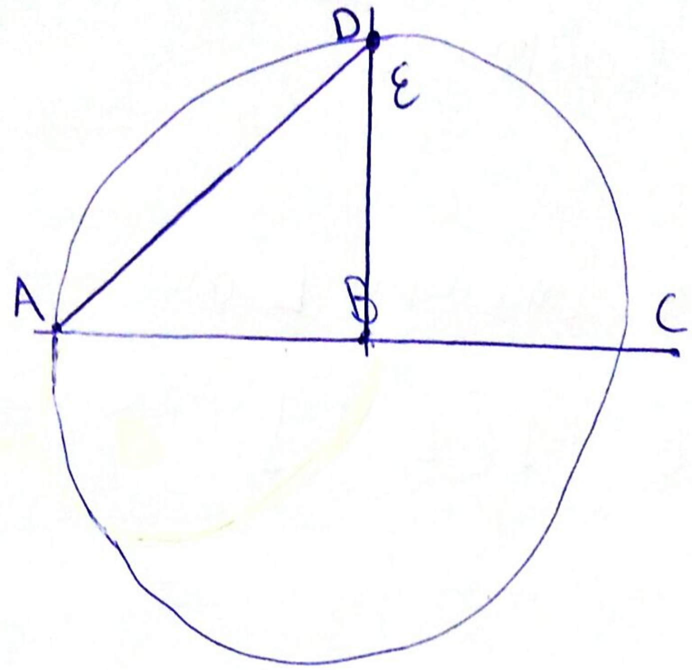
Έστω $F \subseteq \mathbb{C}$ σώμα, $f(x) \in F[x]$ με σώμα ανάλυσης το $L \subset \mathbb{C}$. Το πολυώνυμο $f(x)$ είναι επιλύσιμο με ριζικά πάνω από το F αν και μόνο αν η ομάδα $Gal(L/F)$ είναι επιλύσιμη.

Κατασκευές με κανόνα και διαβήτη.



- κύκλος με κέντρο B ακτίνα AB.
- κύκλος με κέντρο A ακτίνα AB.

Η μεσοκάθετος



Έστω D ένα σημείο τομής της ε με τον κύκλο με κέντρο B και ακτίνα BA. Τότε το AD έχει μήκος ίσο με απόσταση(A,B) * $\sqrt{2}$. Συνεπώς, έχουμε ότι $\sqrt{2}$ είναι κατασκευάσιμο.

$x^2+y^2+ax+by+c=0$

$x^2+y^2+dx+ey+f=0$, με a,b,c,d,e,f στοιχεία του K.

Σύστημα εξισώσεων

Αφαίρεση κατά μέλη

$(d-a)x+(e-b)y+(f-c)=0$

τομή κύκλου και ευθείας.

K υπόσωμα K(q) βαθμού 2.

<u>Υπενθύμιση</u>: Αν F υπόσωμα L υπόσωμα F, τότε $[E:F] = [E:L][L:F]$

<u>Ερώτημα</u> Για ποιους θετικούς ακέραιους m είναι το $2^{2^m}+1$ πρώτος;

<u>Ερώτημα</u> Υπάρχη πεπερασμένο ή άπειρο πλήθος θετικών ακεραίων m ώστε 2^{2m+1} πρώτα

<u>Ερώτημα</u> Υπάρχη πεπερασμένο ή άπειρο πλήθος θετικών ακεραίων m ώστε 2^{2m+1} όχι πρώτος;

Δεν ξέραμε την απάντηση για κανένα από αυτά.